Programa de Ingresso Seletivo Misto – PISM II
Triênio 2007-2009
PROVA DE MATEMÁTICA

QUESTÕES DISCURSIVAS

Questão 1: Seja um conjunto de 31 reservatórios enfileirados, com cada um deles possuindo a forma de um cilindro circular reto. Sabe-se que o primeiro desses reservatórios possui raio medindo 2 *m* e altura medindo 3 *m*. A partir desse primeiro reservatório, verifica-se que, de cada reservatório para o seguinte, a altura aumenta de 20 *cm* em relação ao anterior e que o raio permanece o esmo.

a) Determine o volume do segundo reservatório.

Valor: 1,5 ponto

Obter $H_2 = 3{,}2$ m ***[0,5 ponto]***

Obter $V_2 = 12{,}8\pi$ m³ ***[1,0 ponto]***

Seja H_n a altura do n-ésimo reservatório.

Sabe-se que $R = 2\,\text{m}$, onde R é raio da base dos 31 reservatórios.

Sabe-se ainda que $H_1 = 3\,\text{m}$ e $H_n = H_{n-1} + 0{,}2$.

Para o segundo reservatório tem-se:

$$H_2 = H_1 + 0{,}2 = 3 + 0{,}2 = 3{,}2\,\text{m}.$$

Logo o volume V_2 do segundo reservatório é dado por:

$$V_2 = \pi \cdot R^2 \cdot H_2 = \pi \cdot (2)^2 \cdot (3{,}2) = 12{,}8\pi\,\text{m}^3.$$

b) Encontre a média aritmética simples dos volumes desses reservatórios.

Valor: 2,5 pontos

Identificar a progressão aritmética entre as alturas ou entre os volumes ***[0,5 ponto]***

Obter $H_{31} = 9$ m ou $V_{31} = 36\pi$ m³ ***[1,0 ponto]***

Obter a média entre os volumes com sendo 24π m³ ***[1,0 ponto]***

Como

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{31}}{31} = \frac{\pi R^2 H_1 + \pi R^2 H_2 + \pi R^2 H_3 + \cdots + \pi R^2 H_{31}}{31}$$

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{31}}{31} = \frac{\pi R^2 \left(H_1 + H_2 + H_3 + \cdots + H_{31}\right)}{31}$$

e as alturas desses cilindros formam uma PA de razão $r = 0{,}2$ tem-se

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{31}}{31} = \frac{\pi R^2 \left(\dfrac{H_1 + H_{31}}{2} \times 31\right)}{31}$$

Mas

$$H_{31} = H_1 + 30 \cdot r = 3 + 30 \cdot 0{,}2 = 9\,\text{m}.$$

Com isso,

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{31}}{31} = \frac{4\pi\left(\dfrac{3+9}{2} \cdot 31\right)}{31} = \frac{4\pi \cdot 6 \cdot 31}{31}.$$

Logo

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{31}}{31} = 24\pi\,\text{m}^3.$$

Questão 2: Considere uma pirâmide P quadrangular regular, com aresta da base medindo 4 *cm* e aresta lateral com medida 6 *cm*.

a) Calcule o volume da pirâmide P.

Valor: 1,5 ponto

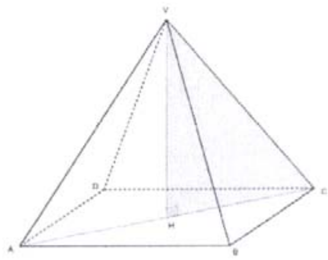
Obter a altura da pirâmide $VH = 2\sqrt{7}$ cm ***[1,0 ponto]***

Obter a área da base $S_{ABCD} = 4^2 = 16$ cm² ***[0,2 ponto]***

Obter o volume da pirâmide $V = \frac{32}{3}\sqrt{7}$ cm³ ***[0,3 ponto]***

O volume da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot VH .$$



Temos que $S_{ABCD} = 4^2 = 16$ cm².

Como $\overline{AC}$ é diagonal da base, $AC = 4\sqrt{2}$ cm.

Sendo a pirâmide regular,

$$HC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras em ΔVHC:

$$VC^2 = VH^2 + HC^2 \Rightarrow VH^2 = VC^2 - HC^2 = 6^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 36 - 8 = 28 \Rightarrow VH = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ cm}$$

Daí vem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{7} = \frac{32}{3}\sqrt{7} \text{ cm}^3.$$

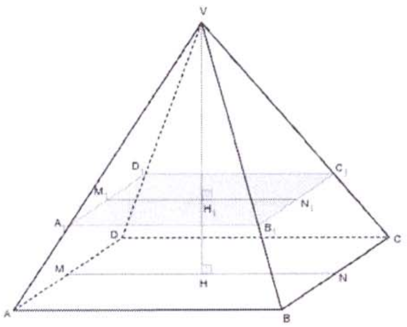
b) Secciona-se a pirâmide P por um plano π paralelo à sua base, obtendo-se assim uma nova pirâmide P_1. A distância entre o plano π e a base de P corresponde a 1/4 da altura da pirâmide P. Obtenha a área da base da nova pirâmide P_1.

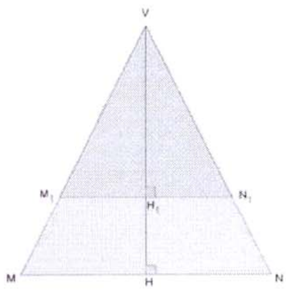
Valor: 1,0 ponto

Obter $H_1N_1 = \frac{3}{2}$ cm ***[0,5 ponto]***

Obter $S_{A_1B_1C_1D_1} = 3^2 = 9$ cm² ***[0,5 ponto]***

Sabe-se que $VH_1 = \frac{3}{4}VH = \frac{3}{4}2\sqrt{7} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$ cm.





Sendo M, N, M_1 e N_1 os pontos médios das arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{A_1D_1}$ e $\overline{B_1C_1}$ respectivamente, temos que $\Delta VH_1N_1 \approx \Delta VHN$ pois, como $\overline{M_1N_1}$ é paralelo a $\overline{MN}$, $V\hat{N}_1H_1$ é congruente a $V\hat{N}H$ (correspondentes) e o ângulo $N_1\hat{V}H_1$ é congruente a $N\hat{V}H$ (mesmo ângulo).

Daí segue que:

$$\frac{VH_1}{H_1N_1} = \frac{VH}{HN} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}\sqrt{7}}{H_1N_1} = \frac{2\sqrt{7}}{2} \Rightarrow H_1N_1 = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{7}\times 2}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{2}\text{ cm.}$$

Então $A_1B_1 = M_1N_1 = 2\times\frac{3}{2} = 3$ cm. Portanto, $S_{A_1B_1C_1D_1} = 3^2 = 9$ cm².

c) Obtenha a área total da pirâmide P_1.

Valor: 1,5 ponto

Obter $S_{VA_1B_1} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ cm² ***[1,0 ponto]***

Obter $S_{Total(P_1)} = 9\left(1 + 2\sqrt{2}\right)$ cm² ***[0,5 ponto]***

De ΔVH_1T_1 temos:

$$VT_1^2 = VH_1^2 + H_1T_1^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 18$$

$VT_1 = 3\sqrt{2}$ cm.

Assim, $S_{VA_1B_1} = \dfrac{A_1B_1 \cdot VT_1}{2} = \dfrac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{2} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ cm².

Portanto: $S_{Total(P_1)} = S_{A_1B_1C_1D_1} + 4S_{VA_1B_1} = 9 + 4.\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

$$S_{Total(P_1)} = 9\left(1 + 2\sqrt{2}\right) \text{ cm}^2.$$