Universidade Federal de Juiz de Fora

COMISSÃO PERMANENTE DE SELEÇÃO - COPESE
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD

Programa de Ingresso Seletivo Misto – PISM I
Triênio 2008-2010
PROVA DE MATEMÁTICA

QUESTÕES DISCURSIVAS

Questão 1: Considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2-16$.

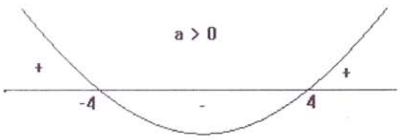
a) Para quais valores de $x\in\mathbb{R}$, $f(x)$ é positivo?

Valor: **1,5 ponto**
Obter $x=\pm 4$ ***[0,5 ponto]***
Fazer o estudo do sinal ***[0,5 ponto]***
Apresentar o conjunto $\{x\in R \mid x<-4 \text{ ou } x>4\}$ ***[0,5 ponto]***

a) $f(x)>0 \Leftrightarrow x^2-16>0$

$x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$

Fazendo o estudo do sinal:



Logo $f(x)>0$ no conjunto $\{x\in R \mid x<-4 \text{ ou } x>4\}$

b) Seja $c\in\mathbb{R}$ tal que $f(c)$ é o menor valor atingido por f. Qual é o coeficiente angular para a função polinomial do 1º grau $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cujo gráfico passa por $(c, f(c))$ e $(3, f(3))$?

Valor: **2,5 pontos**
Obter $c=0$ ***[1,0 ponto]***
Obter $f(0)=-16$ ***[0,5 ponto]***
Obter $f(3)=-7$ ***[0,5 ponto]***
Apresentar o coeficiente angular igual a 3 ***[0,5 ponto]***

b) Nestas condições c deve ser a abscissa do vértice da parábola:

$$c=-\frac{b}{2a} \Rightarrow c=-\frac{0}{2} \Rightarrow c=0.$$

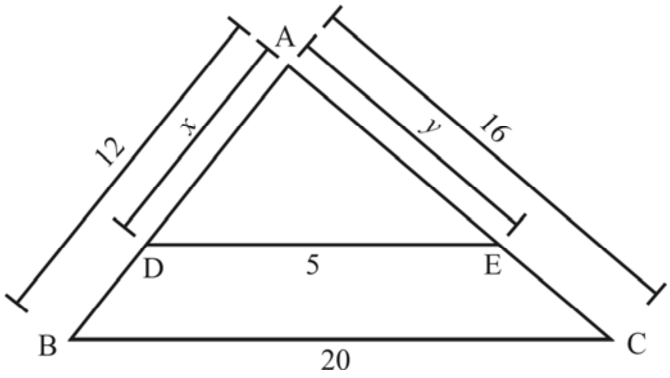
Portanto $c=0 \Rightarrow f(c)=f(0)=(0)^2-16 \Rightarrow f(0)=-16$.

Por outro lado: $f(3)=(3)^2-16 \Rightarrow f(3)=9-16 \Rightarrow f(3)=-7$

Logo o coeficiente angular da função polinomial de 1º grau que passa por $(c,f(c))=(0,-16)$ e por $(3,f(3))=(3,-7)$ é dado por:

$$\frac{-7-(-16)}{3-0}=\frac{9}{3}=3$$

Questão 2: Um triângulo *ABC* tem os lados medindo $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm e $BC = 20$ cm. Sejam *D* um ponto pertencente ao lado $\overline{AB}$ e *E* um ponto pertencente ao lado $\overline{AC}$, formando um novo triângulo *ADE*. O segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$ do triângulo *ABC* e é tal que $DE = 5$ cm.



a) Qual é a área, em cm^2, do triângulo *ABC*?

Valor: **1,5 ponto**

Solução 1:

Justificar que o triângulo é retângulo ***[0,5 ponto]***

Cálculo da área do triângulo *ABC*: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \times AB}{2} = 96cm^2$ ***[1,0 ponto]***

Solução 2:

Utilizar a fórmula $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ***[1,0 ponto]***

Obter $S_{\Delta ABC} = 96cm^2$ ***[0,5 ponto]***

a) Solução 1:

Inicialmente observe que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, já que $20^2 = 16^2 + 12^2$.

Logo o triângulo *ABC* é um triângulo retângulo em *A*. Com isso podemos afirmar que:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \times AB}{2} = \frac{16 \times 12}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = 96cm^2$$

Solução 2:

Calculando o semi-perímetro de ΔABC tem-se: $p = \dfrac{20+16+12}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$.

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \sqrt{24(24-20)(24-16)(24-12)}$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{24(4)(8)(12)} = \sqrt{2^3 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^{10} \cdot 3^2} = 2^5 \cdot 3 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 96cm^2$$

b) Determine, em cm, os comprimentos $AD = x$ e $AE = y$.

Valor: **1,5 ponto**
Justificar que $\Delta ABC \approx \Delta ADE$ ***[0,5 ponto]***
Obter $x = 3$ cm ***[0,5 ponto]***
Obter $y = 4$ cm ***[0,5 ponto]***

b) Como $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, $A\hat{D}E$ é congruente a $A\hat{B}C$ (ângulos correspondentes). E ainda, como $B\hat{A}C$ é congruente a $D\hat{A}E$, segue que $\Delta ABC \approx \Delta ADE$. Dessa semelhança podemos extrair:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{12}{20} \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{16}{20} \Rightarrow y = 4 \text{ cm.}$$

c) Encontre a razão entre a área do triângulo *ADE* e a área do triângulo *ABC*.

Valor: **1,0 ponto**
Utilizar que a razão entre as áreas é dada pelo quadrado da razão de semelhança ***[0,5 ponto]***
Obter a razão entre as áreas como sendo $\frac{1}{16}$ ***[0,5 ponto]***

C) Como já foi constatado, $\Delta ADE \approx \Delta ABC$. Logo, a razão entre suas áreas é dada pelo quadrado de sua razão de semelhança. Com isso:

$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{5}{20}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$